Μελέτη του ελεύθερου απλού περιπάτου

Άσκηση

Ο Σπύρος και η Γεωργία παίζουν ένα παιχνίδι.
Ο Σπύρος έχει $P(\text{νίκης}) = \frac{1}{2}$ ενώ η $P(\text{νίκης } \Gamma) = \frac{1}{3}$

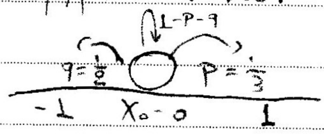
α) Ποια η πιθανότητα μετά από 10 παιχνίδια η Γεωργία να έχει 2 νίκες περισσότερες

β) Ποια η πιθανότητα μετά από 200 παιχνίδια η Γεωργία να προηγείται στις νίκες από 20-30;

Ν.β. η ακριβής και η προσεγγιστική τιμή

Λύση

Έστω X_n η στοχ. διαδ. που περιστάνει τον αριθμό των περ/ρων νικών έχει η Γεωργία μετά το n-οστό παιχνίδι.



→ Ελεύθ. Απλός Τυχ. Περίπατος (Ε.Α.Τ.Π.)

α) $P(X_{10} = 2)$. Θα προσδιορίσω τρόπο υπολογισμού της $P(X_n = k)$ με $k > 0$.

$P(X_n = k)$ $k>0$: Είναι τα συνολικά βήματα εκ των οποίων

n_1 : ο αριθμός των βημάτων προς τα δεξιά

n_2 : ο αριθμός των βημάτων προς τα αριστερά και

n_3 : ο αριθμός των αναπηδήσεων (ισοπαλίες)

άρα $P(X_n = k) = \sum\limits_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1-n_2=k}} P\begin{pmatrix} \text{να έχω } n_1 \text{ βήματα δεξιά} \\ \text{-//- -//- } n_2 \text{ -//- αριστερά} \\ \text{-//- -//- } n_3 \text{ αναπηδ.} \end{pmatrix}$

: n παιχνίδια

Από τα n παιχνίδια τα n_1 είναι νίκες.

Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω σε ποια παιχνίδια κέρδισε;

$\binom{n}{n_1}$ τρόποι με πιθανότητα p^{n_1}

Μου έχουν περισσέψει $n-n_1$ παιχνίδια στα οποία θέλω n_2 ήττες

$\binom{n-n_1}{n_2}$ τρόποι με πιθανότητα q^{n_2}

Ισοπαλίες: $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ τρόποι με πιθαν. $(1-p-q)^{n_3}$

άρα

(6)

$$P(X_n=k)=\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ n_1-n_2=k}} \binom{n}{n_1} p^{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} q^{n_2} \cancel{\binom{n-n_1-n_2}{n_3}}^{\,1} (1-p-q)^{n_3}$$

$$=\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ n_1-n_2=k}} \frac{n!}{n_1!\cancel{(n-n_1)!}}\,\frac{\cancel{(n-n_1)!}}{(n-n_1-n_2)!\,n_2!}\, p^{n_1} q^{n_2} (1-p-q)^{n_3}$$

$$=\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ n_1-n_2=k}} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}\, p^{n_1} q^{n_2} (1-p-q)^{n_3}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

1) Όταν έχουμε $x_0=7$ $x_{10}=13$ μεταφέρουμε το πρόβλημα

στο $x'_0=7$ $x'_{10}=6$

2) όταν $k<0$, θα μπορούσαμε να μελετήσουμε τις νίκες του Σπύρου και άρα τότε $k'>0$

Όταν $P(\text{νίκης } \Gamma)=\frac{1}{3}$ και $P(\text{νίκης } \Sigma)=\frac{2}{3}$ (άρα δεν υπάρχει ισοπαλία)
και άρα $P(X_n=k)=\binom{n}{n_1}p^{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}q^{n_2}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!}p^{n_1}q^{n_2}$ με $\begin{matrix} n_1+n_2=n \\ n_1-n_2=k\end{matrix}$
η οποία είναι διωνυμική κατανομή

β ερώτημα άσκησης) $P(20\le X_{200}\le 30)=\sum_{k=20}^{30} P(X_{200}=k)=$

$$=\sum_{k=20}^{30}\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ n_1-n_2=k}} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}\, p^{n_1} q^{n_2} (1-p-q)^{n_3}$$ άρα γενικά:

$$P(k_1\le X_n\le k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2} P(X_n=k)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα:

<u>Κ.Ο.Θ.</u>: Έστω $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ τ.μ. ανεξάρτητες και ισόνομες με πεπερ. μέση τιμή και διακύμανση τότε σύμφωνα με το Κ.Ο.Θ. για "μεγάλο" n ισχύει:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{\text{προσ.}} N(0,1)$$

Συγκεκριμένα, παρατηρώ

$X_0 = 0$

$X_1 = X_0 + 1^{η}$ μετακίνηση $= X_0 + Z_1 \sim$ τυχαία μεταβλ. που περιγράφει την $1^η$ μετατόπιση και Z_1 δυνατές τιμές: $0, 1, -1$

$X_2 = X_1 + 2^{η}$ μ. $= Z_1 + Z_2$

$$P(Z_1 = z) = \begin{cases} p & , z = 1 \\ q & , z = -1 \\ 1-p-q & , z = 0 \end{cases}$$

$X_3 = X_2 + 3^{η}$ μ. $= Z_1 + Z_2 + Z_3$

άρα γενικά $X_n = Z_1 + \dots + Z_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$

άρα $P(K_1 \le X_n \le K_2) = P\left(K_1 \le \sum_{i=1}^{n} Z_i \le K_2\right)$

$$E(Y) = \begin{cases} \int h(y) f_Y(y)\, dy & , Y \text{ συνεχής} \\ \sum_y h(y) P(Y = y) & , Y \text{ διακριτή} \end{cases}$$

άρα $\mu = E(Z_i) = (1) \cdot P(Z_i = 1) + (-1) P(Z_i = -1) + 0 \cdot P(Z_i = 0) = p - q$

$\sigma^2 = Var(Z_i) = E(Z_i^2) - \left(E(Z_i)\right)^2$

$E(Z_i^2) = 1^2 P(Z_i = 1) + (-1)^2 P(Z_i = -1) + 0^2 P(Z_i = 0) = p + q$

άρα $\sigma^2 = p + q - (p - q)^2$

σ^2 και μ πεπερ.

<u>Αφαιρέσιμη</u>

Η πιθανότητα στην συνεχή κατανομή σε συγκεκριμένη τιμή είναι 0 (π.χ. η πιθανότητα το βάρος μου να είναι 85 κιλά είναι 0), Άρα διορθώνω τη συνέχεια! (προσθαφαιρώ το $\frac{1}{2}$ γιατί έχαμε $\le$)

άρα $P(K_1 \le X_n \le K_2) = P\left(K_1 \le \sum_{i=1}^{n} Z_i \le K_2\right) = P\left(K_1 - \frac{1}{2} \le \sum_{i=1}^{n} Z_i \le K_2 + \frac{1}{2}\right)$

$$= P\left(\frac{K_1 - \frac{1}{2} - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{\sqrt{n\sigma^2}} \le \frac{K_2 - \frac{1}{2} - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \underline{\underline{\simeq}}$$

$$\underline{\underline{\text{ΚΟΘ}}}\ P\left(\frac{K_1 - \frac{1}{2} - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le Z \le \frac{K_2 - \frac{1}{2} - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \,\middle|\, Z \sim N(0,1)\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{K_2 - \frac{1}{2} - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{K_1 - \frac{1}{2} - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

προσοχή:

(*) Η διόρθωση συνέχειας γίνεται όταν έχουμε διακριτές τ.μ.

(8)

Περί πολυωνυμικής κατανομής

Έστω ένα πείραμα που αποτελείται από n το πλήθος δοκιμές. Η κάθε μια εκ των οποίων έχει m δυνατά αποτελέσματα τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους. Έστω τα ενδεχόμενα $C_1, \dots, C_m$ με πιθανότητες $p_i = P(C_i)$ και $p_1 + \dots + p_m = 1$. Οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες και οι πιθανότητες σε κάθε δοκιμή αμετάβλητες.

Έστω $X_1, \dots, X_m$ οι τ.μ. που περιστένουν τον αριθμό των φορών που εμφανίζεται το ενδεχόμενο $C_1, \dots, C_m$ στις n παραπάνω δοκιμές. Άρα

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_m = x_m) = \frac{n!}{x_1! \cdot \dots \cdot x_m!} p_1^{x_1} \cdot \dots \cdot p_m^{x_m} \quad \text{με} \quad \begin{array}{l} x_1 + \dots + x_m = n \\ p_1 + \dots + p_m = 1 \end{array}$$

Τότε $X \sim MN(n, p_1, \dots, p_m)$ ή αλλιώς $X \sim MN(n, p_1, \dots, p_{m-1})$

Παρατηρήσεις

1) Ποια η πιθανότητα $P(X_n > \alpha)$ όταν $n \to +\infty$ και $\mu = E(Z_i) > 0$, $\sigma^2 = Var(Z_i)$ πεπερ. & α: μεγάλος θετικός αριθμός;

Υπενθύμιση: $\mu = p - q$ και $X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$

$$P(X_n > \alpha) = 1 - P(X_n \le \alpha) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i \le \alpha + \tfrac{1}{2}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le \frac{\alpha + \frac{1}{2} - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{\alpha + \frac{1}{2} - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \,\middle|\, Z \sim N(0,1)\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\alpha + \frac{1}{2} - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = 1 - \Phi(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

Η ερμηνεία αυτού του αποτελέσματος είναι:

Όταν το $\mu = p - q > 0$ το συμπαιγνίδιο στον <u>Ε.Α.Τ.Π.</u> με πιθανότητα 1 πάει στο $+\infty$ όταν το $n \to +\infty$

2) Ποια η πιθανότητα $P(X_n \le \beta)$ όταν $n \to +\infty$ και $\mu = E(Z_i) < 0$, $\sigma^2 = Var(Z_i)$ πεπερ. & β: μεγάλος αρνητικός αριθμός

$P(X_n \le \beta) =$ . . . . (από Κ.Ο.Θ.) όμοια από πάνω:

$$P(X_n \le \beta) \doteq \Phi\left(\frac{\beta + \frac{1}{2} - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = \Phi(+\infty) = 1$$

Όταν το $m<0$ το σωματίδιο του <u>Ε.Α.Τ.Π.</u> με πιθανότητα 1 πάει στο $-\infty$ όταν το $n\to+\infty$

<u>Τυχαίος Περίπατος με 2 φράγμ. απορρόφησης</u>

Έστω ένας τυχαίος περίπατος που περιγράφεται ως εξής
Η θέση του (X_n) μετά από n βήματα δίνεται ως το άθρ. των μετατοπίσεων $Y_1+\dots+Y_n$ όπου Y_i η τ.μ. που περιγράφει την i-οστή μετατόπιση $i=1,\dots,n$ με
$Y_1,\dots,Y_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με
$E(Y_i)=\mu$, $Var(Y_i)=\sigma^2$ και $m_y(s)=g(s)=E(e^{sy})$ με $s\in S\subseteq\mathbb{R}$
Σχόλιο: Τα παραπάνω ουσιαστικά θεωρούν ότι $X_0=0$
Υποθέτουμε ότι υπάρχουν 2 φράγματα απορρόφησης, στα σημεία $-\beta$ και α $(\alpha,\beta>0)$. Έστω επίσης X_T: η τ.μ. που παριστάνει τη θέση της στοχ. διαδ. τη χρον. στιγμή της απορρόφησης.